Primitivas e Integrais : Exercícios resolvidos

Matemaníaco

Versão: 13 de Dezembro de 2005

1 Introdução

1.1 REALMENTE IMPORTANTE

Este documento [1] ainda está a ser escrito e está constantemente a ser actualizado/reescrito. Por isso procure sempre uma versão mais recente destes apontamentos no meu site .
Poderá ser útil recorrer aos formulários de primitivas e trigonometria que incluo no site, embora se recomende que se saibam as fórmulas [2]. Nas primeiras versões deste documento, muitos exercícios estarão resolvidos mas pouco ou nada explicados, algo que será gradualmente modificado em futuras versões. Alguns destes exercícios foram questões colocadas/respondidas na rede IRC, nos canais #Matematica e #Matemaniaco da PTnet.
Estes apontamentos não foram feitos, nem estão autorizados pelo seu autor para servir de suporte a qualquer instituição de ensino ou explicações/esclarecimento de dúvidas.
Não é autorizada a sua distribuição ou publicação sem consentimento explícito do autor.
Para mais informações sobre distribuição de documentos "Matemaníaco Online"será adicionada uma página sobre distribuição de documentos no meu site. No entanto, à data da escrita desta versão deste documento, essa página ainda não existe.

1.2 Erros detectados e sugestões

Caso encontre algum erro no documento ou tenha alguma sugestão contacte-me pelo email matemaniaco@sapo.pt Erros de link/página não encontrada

[1] Que por acaso, até está muito incompleto

[2] Poderão alegar que para falar uma língua não é necessário conhecer o dicionário, mas a isso respondo simplesmente: "Você tem noção de quantas palavras sabe só para falar Português?". Saber as fórmulas, não é saber nada do outro mundo, apenas o básico. Pessoalmente, acho que é muito melhor ideia saber demonstrar e compreender bem cada uma das fórmulas, pois assim, mesmo que não se saiba uma fórmula, tem-se uma forma de chegar a ela

podem estar associados a remodelações do site. Nesse caso sugiro que visite o site, ou caso esteja em baixo, visite-me no IRC ou tente encontrar-me no msn messenger (embora muito raramente entre no messenger).

2 Primitivas

Como se sabe, a primitivação é muito simplesmente a operação inversa da derivação.

2.1 Notação

Se uma primitiva de f é F escreveremos:

$$Pf = F + C$$

onde C designa uma constante real. (Isto porque a diferença entre duas primitivas é uma constante) ou

$$Pf(x) = F(x) + C$$

Se soubermos que a variável independente de f e F é x.
Uma outra notação é a de integral indefinido:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Esta notação tem algumas vantagens sobre a notação anterior e deve-se a Leibnitz [3]. Ao longo destes apontamentos utilizarei sem distinção qualquer uma das notações.

2.2 Primitivas Imediatas

Uma primitiva imediata é uma primitiva que se obtem por aplicação inversa de uma conhecida regra de derivação ou da adaptação de uma regra de derivação. Assim sendo, deixo como sugestão a demonstração de todas as fórmulas de primitivação a partir de regras de derivação. Por exemplo: se u é uma função real de variável real e n um número real diferente de 0, temos que Como

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

então

$$Pnu^{n-1}u' = u^n + C$$

[3] Pode-se até interpretar esta notação como uma consequência do teorema fundamental do cálculo ou teorema fundamental da análise...

2.2.1 Primitivação da potência

A fórmula de primitivação da potência é

$$Pu^n u' = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

Em particular se u é uma função cuja derivada é 1, por exemplo, se $u(x) = x$ temos a muito utilizada regra:

$$Px^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Exemplos de aplicação desta fórmula:

$$Px = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^{\sqrt{2}} dx = \frac{x^{1+\sqrt{2}}}{1+\sqrt{2}} + C$$

$$P\left(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3\right) = x + 2\times\frac{x^2}{2} + 3\times\frac{x^3}{3} + 4\times\frac{x^4}{4} + C = x + x^2 + x^3 + x^4 + C$$

2.3 Primitivação por partes

2.4 Primitivação por substituição

$$P\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

fazendo $x = \mathrm{tg}t$, com $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ temos que $x' = \sec^2 t$ e então

$$P\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = P\frac{\mathrm{tg}^2 t}{\left(1+\mathrm{tg}^2 t\right)^2}\sec^2 t =$$

Como $1 + \mathrm{tg}^2 t = \sec^2 t$ então segue-se

$$\begin{aligned}
&= P\frac{\mathrm{tg}^2 t}{\sec^4 t}\sec^2 t \\
&= P\frac{\mathrm{tg}^2 t}{\sec^2 t} \\
&= P\mathrm{tg}^2 t\cos^2 t \\
&= P\frac{\mathrm{sen}^2 t}{\cos^2 t}\cos^2 t \\
&= P\mathrm{sen}^2 t
\end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de linearização $\operatorname{sen}^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$

$$\begin{aligned}
&= P\operatorname{sen}^2 t \\
&= P\frac{1-\cos(2t)}{2} \\
&= \frac{1}{2}P\left(1-\cos(2t)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[t-\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right]+C \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[t-\cos t \operatorname{sen} t\right]\right)+C
\end{aligned}$$

Agora, temos de desfazer a substituição. Para isso há que saber os valores de $\cos t$, $\operatorname{sen} t$ e t.

$$x = \operatorname{tg} t \Rightarrow 1+x^2 = \sec^2 t \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 t$$

Como $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ temos $\cos t > 0$ ou seja

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Para calcular $\operatorname{sen} t$ basta observar que:

$$x = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \Rightarrow \operatorname{sen} t = x \times \cos t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

e para finalizar é obvio que $t = \operatorname{arctg} x$ logo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(t-\cos t \operatorname{sen} t\right)+C &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}\right)+C
\end{aligned}$$

ou seja,

$$P\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}\right)+C$$

3 Primitivação de funções racionais

$$
\begin{aligned}
P\frac{1}{\left(3x^2+4\right)^2} &= P\frac{1}{\left(4\left(\frac{3}{4}x^2+1\right)\right)^2}\\
&= \frac{1}{16}P\frac{1}{\left(\frac{3}{4}x^2+1\right)^2} =\\
&= \frac{1}{16}P\frac{\frac{3}{4}x^2+1-\frac{3}{4}x^2}{\left(\frac{3}{4}x^2+1\right)^2} =\\
&= \frac{1}{16}\left(P\frac{1}{\frac{3}{4}x^2+1} - P\frac{\frac{3}{4}x^2}{\left(\frac{3}{4}x^2+1\right)^2}\right)\\
&= \frac{1}{16}\left(P\frac{1}{\frac{3}{4}x^2+1} - \frac{3}{4}Px\cdot x\cdot\left(\frac{3}{4}x^2+1\right)^{-2}\right) =\\
&= \frac{1}{16}\left(P\frac{1}{\frac{3}{4}x^2+1} - \frac{3}{4}\left(x\cdot\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}x^2+1\right)^{-1}}{-1} - P\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}x^2+1\right)^{-1}}{-1}\right)\right) =\\
&= \frac{1}{16}\left(P\frac{1}{\frac{3}{4}x^2+1} - \frac{3}{4}\left(-\frac{2}{3}x\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}x^2+1} + \frac{2}{3}P\frac{1}{\frac{3}{4}x^2+1}\right)\right) =\\
&= \frac{1}{16}\left(P\frac{1}{\frac{3}{4}x^2+1} + \frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}x^2+1} - \frac{1}{2}P\frac{1}{\frac{3}{4}x^2+1}\right) =\\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}P\frac{1}{\frac{3}{4}x^2+1} + \frac{x}{\frac{3}{2}x^2+2}\right) =\\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}P\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4}x^2+1} + \frac{x}{\frac{3}{2}x^2+2}\right) =\\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}{\sqrt{3}} + \frac{x}{\frac{3}{2}x^2+2}\right) + C
\end{aligned}
$$

4 Exercícios Variados